Correction Feuille Exercice 10

Résolution de système

Exercice 13

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & = & 1 & \\ & & y & = & -1 & \quad 5L_1 - 2L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & 4 \\ y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système a une unique solution : } \mathcal{S} = \{(2, -1)\}.}$$

Exercice 14 (*)

1. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & 5 \\ 2x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & = & 3 & \\ & & -7y & = & 7 & \quad 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ & & 2y & = & 2 & \quad L_1 - L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ & & y & = & -1 \\ & & y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système n'a aucune solution : } \mathcal{S} = \emptyset.}$$

2. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 & \\ & & & & z & = & -1 & \quad L_2 - L_1 \to L_2 \\ & - & 4y & + & 4z & = & -5 & \quad L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 & \\ & - & 4y & + & 4z & = & -5 & \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & & & & z & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & 3 - \dfrac{3}{4} \\ -\ 4y & = & -1 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ & & y & = & \dfrac{1}{4} \\ & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système admet donc une unique solution : } \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{9}{8}, \frac{1}{4}, -1\right)\right\}.}$$

Exercice 15 (**)
On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrclc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 & \\ 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 0 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 0 & \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrclc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 & \\ & & & - & 6z & - & 2t & = & 0 & L_2 - 5L_1 \to L_2 \\ & & & - & 3z & - & t & = & 0 & L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ & & & + & 3z & + & t & = & 0 & L_4 - L1 \to L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrclc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 & \\ & & & - & 6z & - & 2t & = & 0 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & 2L_3 - L_2 \to L_3 \\ & & & & & & 0 & = & 0 & 2L_4 + L_2 \to L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrc} x & = & 2y - 4z & \\ t & = & -3z & \\ 0 & = & 0 & 2L_3 - L_2 \to L_3 \\ 0 & = & 0 & 2L_4 + L_2 \to L_4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est alors } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 4z \\ y \\ z \\ -3z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Inversion de matrice

Exercice 16
On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{array}{c|cl} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & L_1 - 2L_2 \to L_2 \end{array}$$

La matrice A est inversible car les pivots sont non nuls.

$$\begin{array}{c|cl} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 - L_2 \to L_1 \\ . \end{array} \\ & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (1/3)L_2 \to L_2 \end{array} \end{array}$$

On remarque qu'en utilisant le cours, on obtient le déterminant de A égal à -3 et donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux résultats sont bien égaux et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (*)

Les trois questions sont indépendantes

1. On utilise le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c|cl}
\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}1&5&3\\3&9&4\\2&7&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{array}{r}L_1 \leftrightarrow L_3\\ .\\ L_3 \leftrightarrow L_1\end{array}\\
\begin{pmatrix}1&5&3\\0&6&5\\0&3&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&3\\-1&0&2\end{pmatrix} & \begin{array}{r}.\\ 3L_1-L_2 \to L_2\\ 2L_1-L_3\to L_3\end{array}\\
\begin{pmatrix}6&0&-7\\0&6&5\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&5&-9\\0&-1&3\\-2&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{r}6L_1-5L_2\to L_1\\ .\\ 2L_3-L_2\to L_3\end{array}
\end{array}$$

Les pivots obtenus par la méthode de Gauss sont tous non nuls. Donc la matrice est inversible.

$$\begin{array}{c|cl}
\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-14&12&-2\\10&-6&-2\\-2&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_1+7L_3\to L_1\\ L_2-5L_3\to L_2\\ \\ \end{array}\\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&2&-\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\-2&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\frac{1}{6}L_1\to L_1\\ \frac{1}{6}L_2\to L_2\end{array}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&2&-\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\-2&1&1\end{pmatrix}.}$$

2. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c|cl}
\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&-2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & L_1\to L_3\to L_2\to L_1\\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix} & L_3-3L_1\to L_3\\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&2\end{pmatrix} & L_3+2L_2\to L_3
\end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaitre 3 pivot dont un est nul.

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ n'est pas inversible.}}$$

3. (a) On calcule l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 5L_1 + L_2 \to L_1 \\ \\ 5L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 30 & -5 \\ 15 & -85 & 20 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 7L_1 - L_3 \to L_1 \\ 7L_2 + 4L_3 \to L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{5}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{5}L_2 \to L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{7}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{7}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{7}L_3 \to L_3 \end{matrix}$$

Les pivots étant tous non nuls,

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}.}$$

(b) Le système linéaire : $\begin{cases} 3x + 2y - z & = 5 \\ x - y + z & = 1 \\ 2x - 4y + 5z & = -3 \end{cases}$ s'écrit $MX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

La matrice M étant inversible, le système est de Cramer et l'unique solution est donnée par

$$\boxed{X = M^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.}$$

Résolution de système à paramètre

Exercice 18 (*)
On donne le système suivant : (m est un réel donné)

$$(S)\ :\ \begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=1 \end{cases}$$

1. Plusieurs méthodes permettent de répondre. La première façon est d'échelonner le système.

$$(S) \iff \begin{cases} x+my & =1 \\ 0+(1-m^2)y & =1-m \qquad L_2-mL_1 \to L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné et donc les pivots sont 1 et $1-m^2$. Le système est de Cramer si et seulement si tous les pivots sont non nuls. Ainsi, on résout

$$1-m^2=0 \iff (1-m)(1+m)=0$$

Donc

$$\boxed{\text{pour } m \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \text{ le système est de Cramer.}}$$

Par contre,

$$\boxed{\text{Si } m=1 \text{ ou } m=-1, \text{ le système n'est pas de Cramer.}}$$

La deuxième méthode utilise la forme matricielle du système. En effet le système se réécrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or le système est de Cramer si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Or la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si le déterminant de la matrice $1-m^2$ est différent de 0. On retrouve alors les résultats précédents.

2. **Premier cas :** $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$: Dans ce cas le système est

$$\begin{cases} x+my & =1 \\ 0+(1-m^2)y & =1-m \qquad L_2-mL_1 \to L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & =1-my \\ y & =\dfrac{1-m}{1-m^2}=\dfrac{1}{1+m} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & =1-\dfrac{m}{1+m}=\dfrac{1}{1+m} \\ y & =\dfrac{1}{1+m} \end{cases}$$

L'unique solution du système dans ce cas est

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{1+m},\frac{1}{1+m}\right)\right\}}$$

Second cas : $m=-1$: Dans ce cas le système est

$$\begin{cases} x+my & =1 \\ 0+(1-m^2)y & =1-m \qquad L_2-mL_1 \to L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y & =1 \\ 0 & =2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas il n'y a aucune solutions : } \mathcal{S} = \emptyset.}$$

Troisième cas : $m = 1$: Dans ce cas le système est

$$\begin{cases} x + my & = 1 \\ 0 + (1 - m^2)y & = 1 - m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y & = 1 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas il y a une infinité de solutions : } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Exercice 19 (**)

1. On résout le système (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour éviter d'avoir un pivot sur la première ligne qui peut potentiellement être nul, on commence (et on utilisera toujours cette technique pour un système sous cette forme) par intervertir la ligne 1 et 3

$$\begin{cases} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 & \\ 0 & + & \lambda y & - & \lambda z & = & 0 & L_1 - L_2 \to L_2 \\ 0 & - & \lambda y & + & ((1-\lambda)^2 - 1)z & = & 0 & (1-\lambda)L_1 - L_3 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 & \\ & & \lambda y & - & \lambda z & = & 0 & \\ & & & & ((1-\lambda)^2 - 1 - \lambda)z & = & 0 & L_2 + L_3 \to L_3 \end{cases}$$

   (a) Le système est de Cramer si et seulement si les pivots sont tous non nuls. On résout alors $\lambda = 0$ et $(1-\lambda)^2 - 1 - \lambda = 0$. La première équation est évidente et nous donne une première valeur pour laquelle le système n'est pas de Cramer.

$$\begin{aligned} (1-\lambda)^2 - 1 - \lambda = 0 &\Longleftrightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 - \lambda = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

   Pour $\lambda \neq 0$ ou 3, le système (E_λ) est de Cramer.

   (b) **Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$:** Dans ce cas, le système (E_λ) est de Cramer. Ce système admet une unique solution. Et comme le système est homogène,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.}$$

   Pour $\lambda = 0$: On reprend dans ce cas le système (E_λ) sous sa forme échelonnée en remplaçant λ par 0.

$$E_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & (1-0)z & = & 0 \\ & & 0 \times y & - & 0 \times z & = & 0 \\ & & & & ((1-0)^2 - 1 - 0)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix},\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Pour $\lambda=3$ **:** On reprend dans ce cas le système (E_λ) sous sa forme échelonnée en remplaçant λ par 3.

$$E_3 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-3)z & = & 0\\ & & 3y & - & 3z & = & 0\\ & & & & ((1-3)^2-1-3)z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0\\ & & & & 3y & = & 3z\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z\\ y & = & z\\ 0 & = & 0\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. On considère le système (E_λ) : $\left\{\begin{array}{l} -2x-2y+z=\lambda x\\ -2x+y-2z=\lambda y\\ x-2y-2z=\lambda z\end{array}\right.$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

   (a) On résout le système

$$(E_\lambda) : \left\{\begin{array}{l} -2x-2y+z=\lambda x\\ -2x+y-2z=\lambda y\\ x-2y-2z=\lambda z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -(2+\lambda)x-2y+z=0\\ -2x+(1-\lambda)y-2z=0\\ x-2y-(2+\lambda)z=0\end{array}\right.$$

Pour éviter d'avoir un pivot sur la première ligne qui peut potentiellement être nul, on commence (et on utilisera toujours cette technique pour un système sous cette forme) par intervertir la ligne 1 et 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(2+\lambda)x & - & 2y & + & z & = & 0\\ -2x & + & (1-\lambda)y & - & 2z & = & 0\\ x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0\\ -2x & + & (1-\lambda)y & - & 2z & = & 0\\ -(2+\lambda)x & - & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right. \quad L_1\leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0\\ 0 & - & (3+\lambda)y & - & (6+2\lambda)z & = & 0\\ 0 & - & (6+2\lambda)y & + & (-(2+\lambda)^2+1)z & = & 0\end{array}\right. \quad \begin{array}{r} \\ 2L_1+L_2\to L_2\\ (2+\lambda)L_1+L_3\to L_3\end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0\\ 0 & - & (3+\lambda)y & - & (6+2\lambda)z & = & 0\\ & & & & ((2+\lambda)^2-1-2(6+2\lambda))z & = & 0\end{array}\right. \quad 2L_2-L_3\to L_3$$

(b) Le système est de Cramer si et seulement si les pivots sont tous non nuls. On résout alors $3+\lambda=0$ et $(2+\lambda)^2-1-2(6+2\lambda)=0$. La première équation est évidente et nous donne $\lambda=-3$ pour laquelle le système n'est pas de Cramer. On résout

$$\begin{aligned}(2+\lambda)^2-1-2(6+2\lambda)=0 &\iff 4+4\lambda+\lambda^2-13-4\lambda=0\\ &\iff \lambda^2-9\lambda=0\\ &\iff (\lambda+3)(\lambda-3)=0\end{aligned}$$

Pour $\lambda\neq -3$ ou 3, le système (E_λ) est de Cramer.

(c) **Pour** $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ **:** Dans ce cas, le système (E_λ) est de Cramer. Ce système admet une unique solution. Et comme le système est homogène,

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.}$$

Pour $\lambda=-3$ **:** On reprend dans ce cas le système (E_λ) sous sa forme échelonnée en remplaçant λ par -3.

$$E_0\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & (2-3)z & = & 0\\ & & 0\times y & - & 0\times z & = & 0\\ & & & & ((2-3)^2-1-2(6-6))z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}2y+z\\y\\z\end{pmatrix},\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Pour $\lambda=3$ **:** On reprend dans ce cas le système (E_λ) sous sa forme échelonnée en remplaçant λ par 3.

$$E_3\iff\left\{\begin{array}{rrcrcl} - & 2y & - & (2+3)z & = & 0\\ - & (3+3)y & - & (6+6)z & = & 0\\ & & & 0\times z & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcr} x & = & z\\ y & = & -2z\\ 0 & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z\\ y & = & z\\ 0 & = & 0\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\}.}$$